

**TÉCNICA de aprendizaje CASO-  
PROBLEMA**

**INNOVACIÓN EDUCATIVA EN  
ASIGNATURAS BÁSICAS DE  
INGENIERÍA**

24 de Enero de 2010

Escuela Universitaria de Informática

UPM, Madrid (España)

## TÉCNICA DE ENSEÑANZA CASO- PROBLEMA

Emilia Palma Villalón

Departamento de Matemática Aplicada y  
Estadística

- Escuela Universitaria de Ingeniería  
Técnica **Aeronáutica**
- Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del  
**Espacio**  
U.P.M.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E.U.I.T. Aeronáutica



Técnica Caso-Problema: **Problema**  
**Generador** con aprendizaje **cooperativo**  
y enseñanza no secuencial en  
asignaturas de una ingeniería



eiae

Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio



POLITÉCNICA

POLITÉCNICA



# Técnica de Enseñanza Caso \_Problema

Oigo y olvido

Veo y recuerdo

Hago y aprendo

- Si no me lo piden NO lo hago.
- “Me suena”, desconecto.
- No puntúa, tengo otras cosas más importantes.
- Creo saberlo, intento hacerlo y me doy cuenta que no lo domino
- Se lo **explico** a un compañero, veo los fallos de mi razonamiento.
- ¿Cómo me **evalúan?** a través de la resolución de **problemas**



## CASO-PROBLEMA

Se entrega un **caso**  
(atractivo!!si es posible)

se plantea un **problema** generador

conocimientos  
anteriores

libro

explicación  
del profesor

**Grupo pequeño**

**dos o tres** alumnos/grupo

Entrega de **un** caso-problema (grupo)

Devuelve en la siguiente clase el caso-problema **corregido** (profesor)



## Método durante la clase

1. Lectura rápida para señalar lo desconocido.
2. Explicación rápida de lo que van a ver.
3. En grupos de dos o tres empiezan a resolver un apartado
4. El profesor observa y según ello, explica (incluida la parte teórica)
5. El grupo vuelve a intentar resolver el apartado.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
E.U.I.T. Aeronáutica

**Puesta en practica con  
ustedes**

**Caso-problema de  
Álgebra Lineal:**

POLITÉCNICA



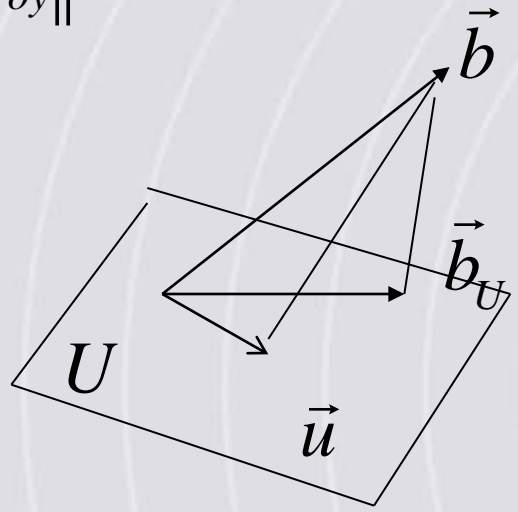
## Tema Espacio vectorial Euclídeo:

$$\left\| \vec{b} - \underbrace{\vec{b}_U}_{\substack{\text{Proyección} \\ \text{Ortogonal} \\ \text{b sobre U}}} \right\| \leq \left\| \vec{b} - \vec{u} \right\| \quad \forall \vec{u} \in U ?$$





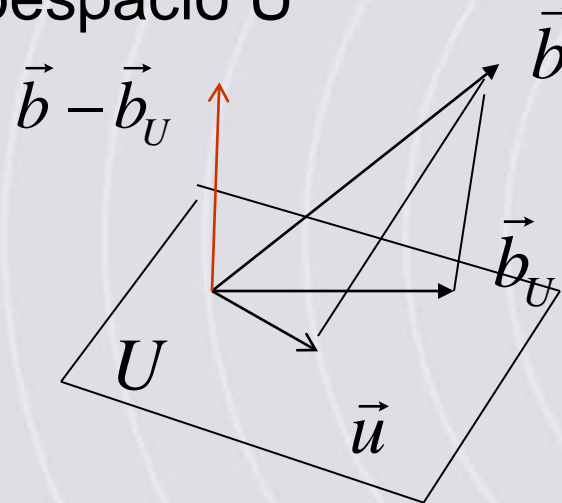
$$i \left\| \vec{b} - \underbrace{\vec{b}_U}_{\text{Proy}} \right\| \leq \left\| \vec{b} - \vec{u} \right\| \quad \forall \vec{u} \in U ?$$





## Teorema de la mejor aproximación:

$\|\vec{b} - \vec{b}_U\|$  es la mínima distancia del vector al subespacio  $U$



$$\vec{b} - \vec{b}_U \in U^\perp$$



## Método de los Mínimos Cuadrados

Si un **problema no tiene solución**, se aproxima la solución por el método de mínimos de cuadrados haciendo que la norma al cuadrado de la diferencia entre el valor exacto y el **valor aproximado** sea mínima:

$$\left\| \underbrace{\vec{b}}_{\text{exacto}} - \underbrace{\vec{c}}_{\text{aproxim}} \right\|^2 \text{ mínima}$$



Método de Mínimos Cuadrados para aproximar un sistema de **ecuaciones lineales- incompatible**

$$AX = B \quad \text{no tiene solución}$$

- ❑ Se busca un sistema aproximado compatible

$$AX = \underbrace{C}_{\text{aprox}}$$

- ❑ luego  $C$  debe pertenecer al subespacio vectorial imagen de la aplicación lineal para que tenga solución:

$$f(X) = AX = C \Rightarrow C \in \text{Im } f$$



Método de Mínimos Cuadrados para aproximar un sistema **incompatible** de **ecuaciones lineales**

$$X ? \quad f(X) = AX = C \approx B$$

De tal forma que:  $\|\vec{b} - \vec{c}\|^2$  *mínima*

Por el Teorema de mínima distancia lo tenemos asegurado si C es la proyección ortogonal de B sobre  $\text{Im } f = L\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$

Que está generado (columnas de A)

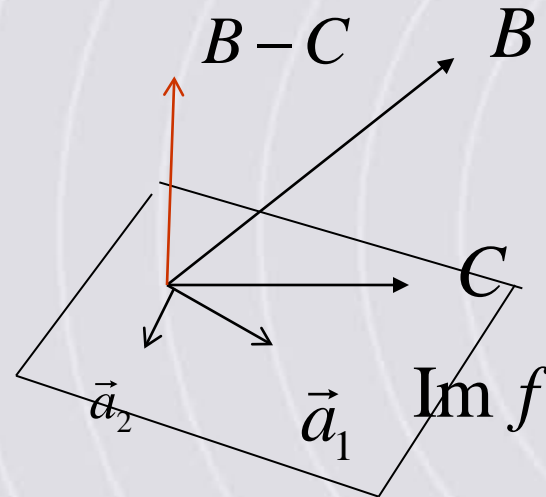


Método de Mínimos Cuadrados para aproximar un sistema de **ecuaciones lineales incompatible**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_{m1}}_{\vec{a}_1} & \cdots & \underbrace{a_{mn}}_{\vec{a}_n} \end{pmatrix} \Rightarrow C \in \text{Im } f = L\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

$$\Rightarrow B - C \perp \text{Im } f$$

*C* proy  
ortogonal

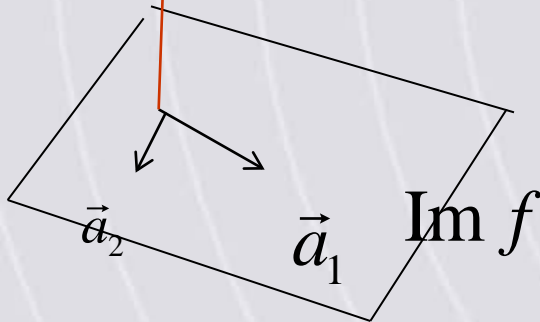




## Método de Mínimos Cuadrados: ecuaciones normales

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}_1 \cdot (B - C) = 0 \\ \vec{a}_2 \cdot (B - C) = 0 \\ \dots \\ \vec{a}_n \cdot (B - C) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (a_{11} \quad \dots \quad a_{n1}) \cdot (B - AX) = 0 \\ (a_{12} \quad \dots \quad a_{n2}) \cdot (B - AX) = 0 \\ \dots \\ (a_{1n} \quad \dots \quad a_{nn}) \cdot (B - AX) = 0 \end{array} \right\}$$

$$B - C \quad \Leftrightarrow A^T (B - AX) = 0 \Leftrightarrow A^T AX = A^T B$$





Solución: Ecuaciones normales

$$A^T AX = A^T B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

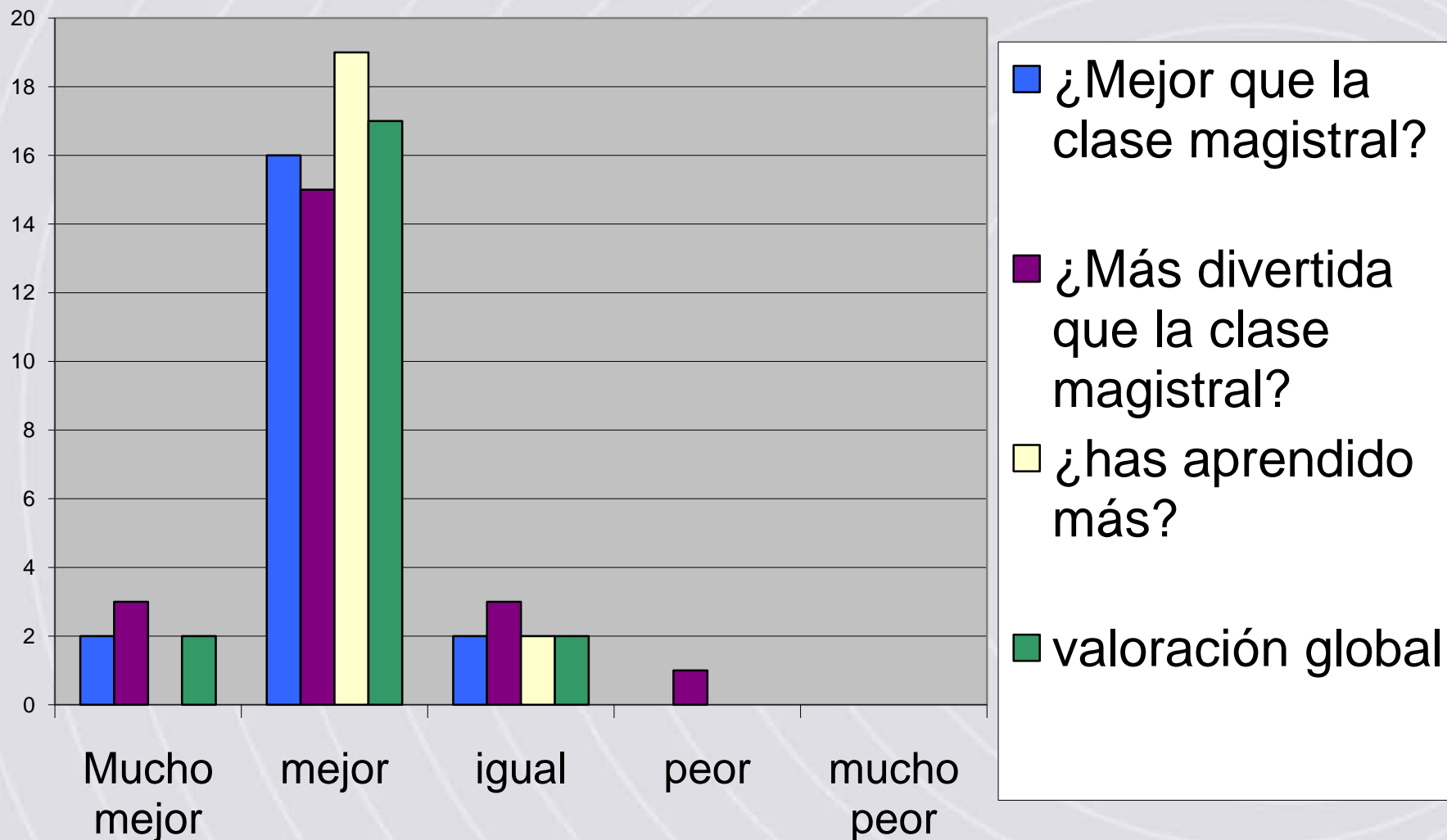
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 11 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

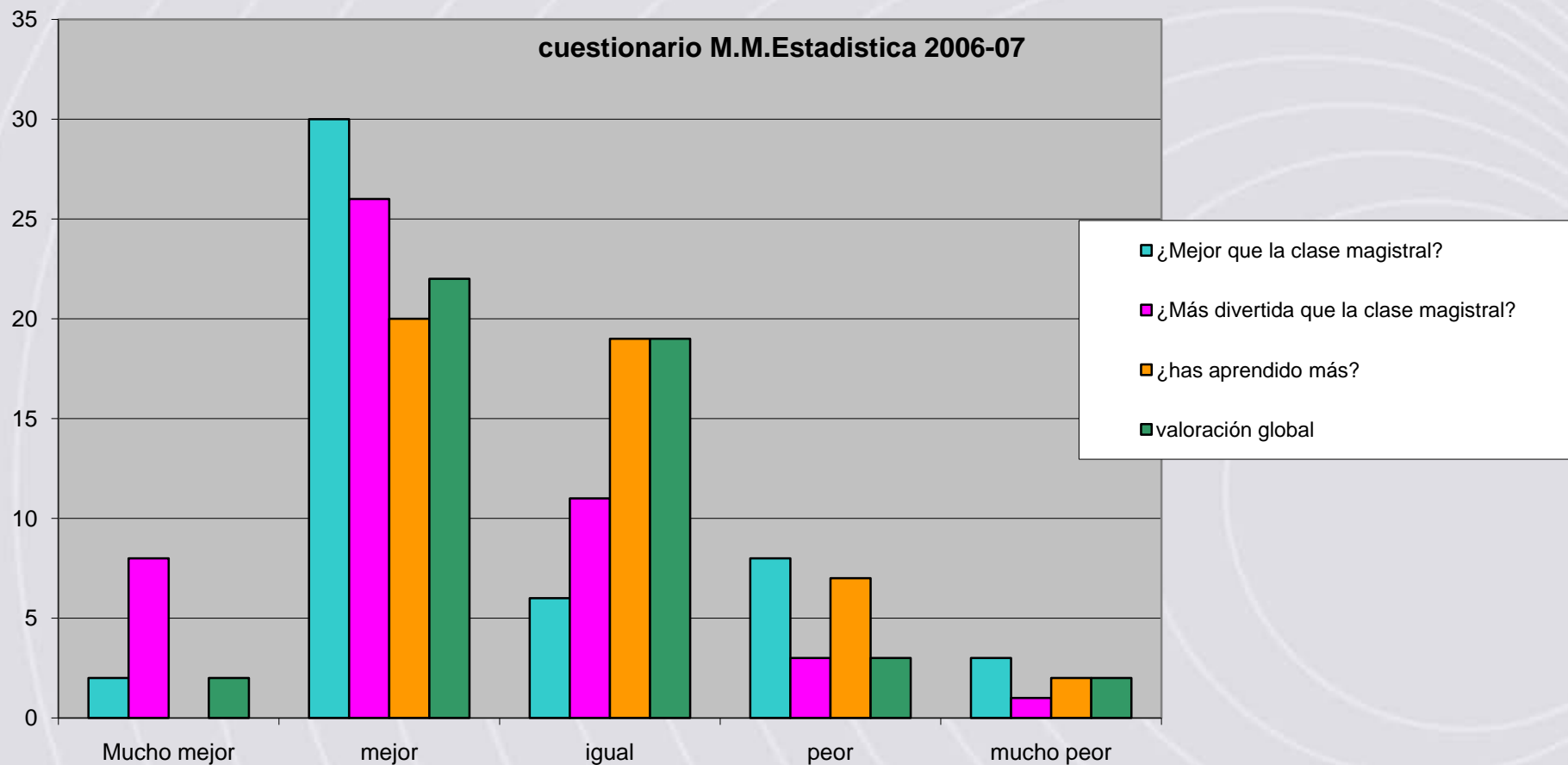
$$\Rightarrow (x, y) = (1, 1)$$





## Cálculo I 2005-06

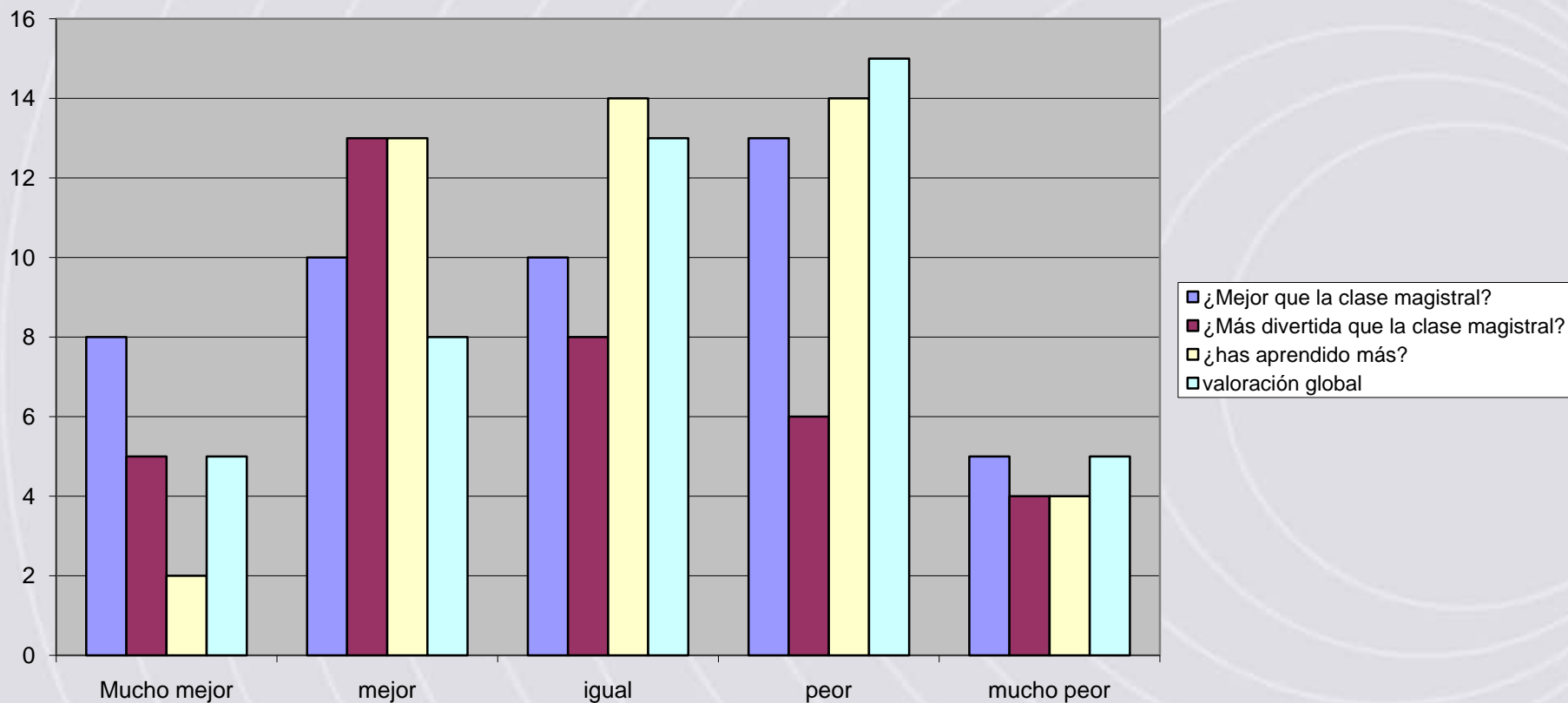






# Cálculo I 2006-07 grupo numeroso 85

Experiencia Cálculo I Aeronav grupo completo





## Ventajas

- Más **amena** para el alumno y para el profesor
- Mejor comprensión de la asignatura
- Utilizan correctamente el **lenguaje matemático**
- Saben aplicar mejor los métodos
- Afianzan los conceptos fundamentales
- Conectan los distintos temas
- El alumno ha **resuelto ... problemas** con todo su contenido teórico

## desVentajas

- Tiene que aplicarse a **grupos de menos de 60 alumnos**
- Problemas con alumnos con otro tipo de aprendizaje



# Técnica de enseñanza-aprendizaje de las **Matemáticas** puesta en práctica en

## **EUITAeronautica:**

**Cálculo I** en los cursos 2005-09

Cálculo II en 2005-06

Métodos Matemáticos-**Estadística** 2006-10

## **EIAEspacio:**

Matemáticas I - **Álgebra lineal** 20010-11



# Matemáticas I-Álgebra en 2010-11 clases de 65 alumnos. Correo de un alumno

- ❑ Exámenes cada dos semanas con lectora óptica para los 650 alumnos del Grado Aeroespacial común a todos los 10 grupos
- ❑ Alumnos de notas muy buenas: nota de corte estaba en 10,25

*Correo de un alumno aprobado:*

*“muchas gracias emilia!! y una cosa ha sido la profesora con la que **mejor me lo he pasado en clase!!!!jajaja**”*



Emilia, en absoluto me lo he pasado solo bien, **he aprendido muchísimo** este semestre, y cosas nuevas que nunca había dado y que seguro me servirán más adelante, con mi anterior mensaje solo quería transmitirle mi gran agradecimiento y alegría. Y es más, cuando llegué a la universidad me chocó mucho el cambio del trato alumno-profesor entre el instituto y la universidad pero usted ha hecho que nos sintamos **mejor en clase con un buen clima que favorece una mayor absorción** de conocimientos. Y es que usted ha conseguido, y créame por que he sido alumno suyo, enseñarnos álgebra de una forma **más amena** y mucho **más positiva**, y tenga en cuenta que eso pocos profesores son capaces de conseguirlo por no decir ninguno. Por lo que no tiene por qué cuestionarse si solo nos lo hemos pasado bien o hemos aprendido algo, porque usted **ha conseguido enseñarnos álgebra sin hacernoslo pasar mal** por lo que yo y mis compañeros nos sentimos muy agradecidos. Sinceramente, muchísimas gracias Emilia.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
E.U.I.T. Aeronáutica

Muchas gracias por  
su atención

Emilia Palma Villalón  
[Emilia.palma@upm.es](mailto:Emilia.palma@upm.es)