Entrenamiento matemático. Hoja MD5

EU Informática
UPM

Apellidos:

Nombre:

Grupo:

Dpto. MA
GIEMATIC [1]

Inducción y Recursividad (Matemática Discreta)

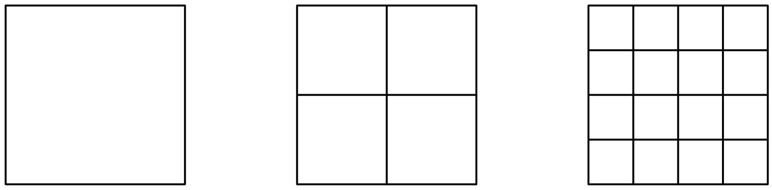
a) Probar por inducción:

1. $4 + 12 + \cdots + (8n - 4) \; = \; (2n)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq 1.$

2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) \; = \; \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq 1.$

[1]Grupo de Innovación Educativa GIEMATIC: José J. Carreño, Jesús García, Ana Lías, Ángeles Martínez.

b) Se considera la siguiente sucesión de cuadrados



$n=1$	$n=2$	$n=3$
$C(1)=1$	$C(2)=4$	$C(3)=16$

1. Dar una definición recursiva y una explícita de la función $C(n)$, que cuenta el número de cuadrados de lado mínimo que hay en cada etapa.

2. Probar por inducción que $\quad C(1)+C(2)+\cdots+C(n)=\dfrac{4^n-1}{3} \quad$ para todo $n \geq 1$.

c) Definir una función recursiva $f : \mathbb{N} \to LIST_P(\mathbb{N})$ tal que:

$$f(n) = [1, 1+2, \dots, 1+\cdots+n]$$

d) Definir una función recursiva $SV(v_1, v_2)$, tal que dados dos vectores de la misma longitud, devuelva el vector suma de ambos. Por ejemplo:

$$SV([1,1],[3,-2]) = [4,-1], \qquad SV([1,0,5],[3,-2,4]) = [4,-2,9]$$

e) Las matrices se pueden representar como listas de listas del modo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \big[\,[2,5,0,3],[-4,3,0,0],[-6,5,2,1]\,\big]$$

Definir una función recursiva $SM(m_1, m_2)$ que dadas dos matrices del mismo tamaño devuelva la matriz suma de ambas.

Nota: Utilizar la función definida anteriormente SV.

f) Los polinomios de la forma $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ se pueden representar como listas del modo siguiente $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Definir la función recursiva SP tal que dados dos polinomios devuelva el polinomio suma de ambos.